

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Аналитическая механика
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика перспективных технологий: альтернативная энергетика, научное программирование и функциональные материалы Физтех-школа Электроники, Фотоники и Молекулярной Физики кафедра теоретической механики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Экзамен

4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 60 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 8

Программу составили:

Н.И. Амелькин, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

М. Ахлумади, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Е.С. Егорова, ассистент

В.А. Козьминых, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.В. Сахаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

С.В. Семендяев, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.В. Сидоренко, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической механики 11.09.2024

## Аннотация

Аналитическая механика является одной из фундаментальных дисциплин естественнонаучного цикла. Ее изучение имеет определяющее значение для формирования навыков и мышления будущих инженеров и научных работников. Аналитическая механика как раздел физики дает представление об основных законах природы. При этом она обучает построению математических моделей объектов исследования. Эти модели затем изучаются при помощи известных математических методов, прежде всего, теории дифференциальных уравнений. В ряде случаев математические методы специально разрабатываются для поставленных задач механики; в этом смысле аналитическая механика является источником идей для развития ряда разделов математики и тесно с ней связана. Многие механические модели и методика их исследования обобщаются и эффективно используются в теоретической физике, применяются в химии, биологии, экономике и т.д.

Одной из целей настоящего курса является более глубокая проработка основных законов и методов механики, которые изучались студентами в курсе общей физики. Так, подробно изучается кинематика и, в частности, кинематика твердого тела, что необходимо при составлении уравнений движения систем различного типа, изучаемых в аналитической механике. Достаточно подробно рассматривается динамика твердого тела с неподвижной точкой, составляющая центральную часть динамики твердого тела — одного из основных объектов изучения в механике. Совершенно новыми являются для студентов разделы лагранжевой и гамильтоновой механики, позволяющих для достаточно широкого класса систем формализовать процедуру составления дифференциальных уравнений движения и предлагающие методы их исследования. Весьма полезными в приложениях являются разделы гамильтоновой механики, изучающие теорию канонических преобразований, а также уравнение Гамильтона — Якоби. Рассматриваются положения равновесия системы и методы исследования их устойчивости. К последним относятся теоремы прямого метода Ляпунова, а также исследование устойчивости по первому приближению. Рассматриваются движения консервативных и диссипативных систем в окрестности положений равновесия, вынужденные колебания системы при наличии внешних периодических и непериодических воздействий. Важной составной частью курса является изучение вариационных принципов механики, как дифференциальных, так и интегральных (принцип Даламбера — Лагранжа, принцип виртуальных перемещений, принцип Гамильтона — Остроградского). Принципы механики позволяют исследовать общие свойства движений механических систем, а также получать различные типы уравнений аналитической механики; их обобщение играет важную роль в механике сплошных сред, термодинамике, электродинамике, квантовой механике, теории относительности и др.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Изучение тех общих законов, которым подчиняются движение и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимодействия между телами, а также овладение основными алгоритмами исследования равновесия и движения механических систем. На данной основе становится возможным построение и исследование механико-математических моделей, адекватно описывающих разнообразные механические явления. Помимо этого, при изучении аналитической механики вырабатываются навыки практического использования методов, предназначенных для математического моделирования движения систем твердых тел.

### Задачи дисциплины

1. Изучение механической компоненты современной естественнонаучной картины мира, понятий и законов механики.
2. Овладение важнейшими методами решения научно-технических задач в области механики, основными алгоритмами математического моделирования механических явлений.
3. Формирование устойчивых навыков по применению фундаментальных положений аналитической механики при научном анализе ситуаций, с которыми инженеру приходится сталкиваться в ходе создания новой техники и новых технологий.
4. Ознакомление студентов с историей и логикой развития аналитической механики.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
--------------------------------	-----------------------------------

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

1. Аксиоматику классической механики.
2. Кинематику точки и твердого тела, метод сложного движения.
3. Основные динамические величины и теоремы об их изменении.
4. Особенности движения материальной точки в центральном поле.
5. Основы динамики твердого тела, понятие о тензоре инерции.
6. Уравнения Лагранжа, иметь понятия об обобщенных координатах, скоростях и силах.
7. Условия равновесия механических систем.
8. Условия устойчивости равновесия механических систем.
9. Особенности движения механических систем в малой окрестности устойчивых положений равновесия.
10. Метод функций Ляпунова.
11. Особенности движения систем в случае воздействия на них внешних гармонических (относительно времени) сил.
12. Канонические уравнения Гамильтона, скобки Пуассона, первые интегралы.
13. Вариационный принцип Гамильтона.
14. Основные интегральные инварианты гамильтоновых систем.
15. Понятие о канонических преобразованиях. Критерии каноничности.
16. Уравнение Гамильтона-Якоби.

уметь:

1. Использовать математический аппарат для решения конкретных механических задач.
2. Составлять и анализировать уравнения дифференциальных и геометрических механических связей.
3. Записывать выражения основных кинематических и динамических величин в координатной форме.
4. Составлять уравнения движения механической системы, используя основные теоремы динамики.
5. Решать специальные задачи классической механики (движение точки в центральном поле, движение твердого тела с одной неподвижной точкой).
6. Составлять и анализировать уравнения Лагранжа, находить их первые интегралы.
7. Определять положения равновесия механических систем и исследовать их на устойчивость.
8. Исследовать движения механических систем в окрестности устойчивых положений равновесия.
9. Составлять и исследовать канонические уравнения Гамильтона
10. Использовать аппарат вариационного исчисления в задачах нахождения прямого пути механической системы.
11. Записывать интегральные инварианты гамильтоновых систем.
12. Составлять уравнения Гамильтона-Якоби. В случае разделения переменных уметь решать эти уравнения.

владеть:

1. Навыками записи кинематических связей, наложенных на систему.
2. Навыками применения основных теорем динамики, уравнений Лагранжа и уравнений Гамильтона для получения уравнений движения в координатной форме.
3. Математическим аппаратом, необходимым для решения и исследования уравнений движения системы.
4. Навыками работы в различных программных системах, позволяющих осуществлять аналитическое и численное исследования математико-механических моделей.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аксиоматика классической механики	2	2		4
2	Кинематика точки	2	4		4
3	Кинематика твердого тела (кинематика систем отсчета)	4	4		6
4	Алгебра кватернионов	4	4		6
5	Основные теоремы динамики	4	4		8
6	Движение материальной точки в центральном поле	2	2		3
7	Динамика твердого тела	6	4		6
8	Динамика систем переменного состава	2	2		2
9	Лагранжева механика	4	4		6
10	Условия равновесия материальной системы	2	2		4
11	Устойчивость	4	4		5
12	Малые колебания консервативных систем	4	4		5
13	Вынужденные колебания. Частотные характеристики	2	2		5
14	Уравнения Гамильтона	4	4		4
15	Первые интегралы гамильтоновых систем	4	4		4
16	Вариационный принцип Гамильтона	4	4		4
17	Интегральные инварианты	2	2		4
18	Канонические преобразования	2	2		5
19	Уравнение Гамильтона–Якоби	2	2		5
Итого часов		60	60		90
Подготовка к экзамену		60 час.			
Общая трудоёмкость		270 час., 6 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Аксиоматика классической механики

Постулаты классической механики. Инерциальные системы отсчета. Понятие силы. Законы Ньютона. Преобразования Галилея. Понятие об инвариантности и ковариантности уравнений механики.

## 2. Кинематика точки

Траектория, скорость, ускорение. Естественный (сопровождающий) трехгранник. Разложение скорости и ускорения в осях трехгранника. Криволинейные координаты точки. Разложение скорости и ускорения точки в локальном базисе криволинейных координат. Коэффициенты Лапе. Сложное движение точки. Теоремы о сложении скоростей и ускорений.

## 3. Кинематика твердого тела (кинематика систем отсчета)

Твердое тело. Разложение движения тела на поступательное движение и вращение (движение с неподвижной точкой). Способы задания ориентации твердого тела: углы Эйлера, матрицы направляющих косинусов.

Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Распределение скоростей и ускорений в твердом теле (формулы Эйлера и Ривальса). Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси; вращение вокруг неподвижной точки, подвижный и неподвижный аксоиды. Плоскопараллельное движение твердого тела, мгновенный центр скоростей, мгновенный центр ускорений, подвижная и неподвижная центроиды. Кинематический винт твердого тела.

Сложное движение твердого тела. Сложение вращений вокруг пересекающихся и параллельных осей, пара вращений. Вычисление угловой скорости и углового ускорения тела в сложном движении. Кинематические уравнения Эйлера. Прецессионное движение твердого тела. Общий случай сложения движений твердого тела.

## 4. Алгебра кватернионов

Алгебра кватернионов. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела (присоединенное отображение). Параметры Родрига–Гамильтона. Кватернионные формулы сложения поворотов. Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела с неподвижной точкой. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Интегрирование уравнений Пуассона для прецессионного движения твердого тела.

## 5. Основные теоремы динамики

Основные понятия динамики систем: внешние и внутренние силы, момент силы, элементарная работа и мощность силы, главный вектор и главный момент системы сил; центр масс, количество движения, кинетический момент, кинетическая энергия механической системы. Теоремы Кенига для кинетической энергии и кинетического момента. Теоремы об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии в инерциальных системах отсчета.

Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы. Критерий потенциальности сил. Консервативные системы, закон сохранения энергии. Неинерциальные системы отсчета, силы инерции. Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета.

## 6. Движение материальной точки в центральном поле

Законы сохранения. Уравнение Бине. Поле всемирного тяготения. Уравнение конических сечений. Задача двух тел. Законы Кеплера.

## 7. Динамика твердого тела

Геометрия масс. Тензор инерции и эллипсоид инерции твердого тела. Главные оси инерции. Преобразование тензора инерции при повороте и параллельном переносе осей. Теорема Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции. Кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела.

Динамические уравнения Эйлера. Дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела. Случай Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой; первые интегралы движения; геометрическая интерпретация Пуансо. Движение динамически симметричного тела в случае Эйлера; параметры свободной регулярной прецессии. Дифференциальные уравнения движения тяжелого твердого тела (уравнения Эйлера — Пуассона) и их первые интегралы. Случаи интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона. Случай Лагранжа; первые интегралы движения. Формула для момента, поддерживающего вынужденную регулярную прецессию динамически симметричного твердого тела (основная формула гироскопии). Эквивалентные преобразования системы сил, действующих на твердое тело. Алгоритм сведения к динамическому винту.

## 8. Динамика систем переменного состава

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента для систем переменного состава. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

## 9. Лагранжева механика

Понятие механической связи. Классификация связей. Голономные и неголономные системы. Возможные, действительные и виртуальные перемещения. Общее уравнение динамики для системы материальных точек с идеальными связями. Обобщенные координаты.

Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (лагранжиан системы). Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчета.

Свойства уравнений Лагранжа: ковариантность, невырожденность (приведение к нормальному виду Коши). Структура кинетической энергии. Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы. Первые интегралы лагранжевых систем: циклические интегралы, обобщенный интеграл энергии (интеграл Пенлеве–Якоби). Обобщенный потенциал.

Семестр: 4 (Весенний)

## 10. Условия равновесия материальной системы

Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений). Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил). Условия равновесия в случае потенциального поля сил.

## 11. Устойчивость

Определение устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина — Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Теорема Лагранжа — Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия (теоремы Томсона — Тэта — Четаева). Устойчивость перевернутого «спящего» волчка Лагранжа как пример гироскопической стабилизации.

Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства).

Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Бифуркации «смена устойчивости», «складка», «вилка», «рождение цикла». Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

## 12. Малые колебания консервативных систем

Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней.

### 13. Вынужденные колебания. Частотные характеристики

Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Вынужденные колебания в консервативных системах. Резонанс в вынужденных колебаниях.

Регулярные и странные аттракторы в диссипативных системах. Понятие о детерминированном хаосе.

### 14. Уравнения Гамильтона

Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

### 15. Первые интегралы гамильтоновых систем

Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Теорема Эмми Нетер.

### 16. Вариационный принцип Гамильтона

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.

### 17. Интегральные инварианты

Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

### 18. Канонические преобразования

Канонические преобразования. Критерии каноничности в терминах производящих функций. Преобразования, допускающие  $(q, q\sim)$ -описания (свободные преобразования) и  $(q, p\sim)$ -описания. Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях.

Локальный критерий каноничности. Критерии каноничности, записанные через скобки Лагранжа и скобки Пуассона.

Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

### 19. Уравнение Гамильтона–Якоби

Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случай разделения переменных.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, маркерная доска, связь с Интернетом).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

## Основная литература

1. Сборник задач по аналитической механике, [учебное пособие] /Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. И. Яковенко ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет). Москва, МФТИ, 2018
2. Введение в теоретическую механику [Текст], учеб. пособие /Ю. И. Ханукаев; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т). -М., МФТИ, 2017
3. Элементы аналитической механики / Ю. И. Ханукаев. – Москва: МФТИ, 2022.
4. Кинематика точки и твердого тела / А. В. Фомичев, Москва, МФТИ, 2021
5. Лагранжева и гамильтонова механика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. И. Амелькин ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 112 с.
6. Лекции по аналитической механике [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ф. Р. Гантмахер ; под ред. Е. С. Пятницкого .— Изд. 3-е, стереотип. — М. : Физматлит, 2001, 2002, 2005 .— 264 с.
7. Основы теоретической механики [Текст] : учебник для вузов / В. Ф. Журавлев ; Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 304 с.
8. Теоретическая механика [Текст] : учебник для вузов / А. П. Маркеев .— 4-е изд., испр. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2007 .— 592 с.
9. Курс аналитической механики : учеб. пособие / Н. И. Амелькин; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). – Москва : МФТИ, 2023. – 298 с.

## Дополнительная литература

1. Классическая механика [Текст] = Classical Mechanics / Г. Голдстейн, Ч. Пул, Дж. Сафко; пер. с англ. Ю. В. Колесниченко; под ред. С. Г. Новокшонов. — [Учебное изд.] .— М.; Ижевск : Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2012 .— 828 с.
2. Задачи по теоретической механике, Электронная копия доступна на сайте электронно-библиотечной системы / И. В. Мещерский ; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. — Санкт-Петербург, Лань, 2019
3. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 .— 416 с.
4. Знакомство с инерциальной навигацией / А. В. Фомичев. – Москва: МФТИ, 2022.
5. Теорема Барбашина–Красовского в теории устойчивости механических систем / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Кафедра теоретической механики. – Москва: МФТИ, 2022.
6. Теоретическая механика [Текст] : учебник для вузов / С. В. Болотин [и др.] .— М. : Академия, 2010 .— 432 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru> - сайт электронной библиотеки МФТИ
2. <https://mipt.ru/institute-departments/kafedra-teoreticheskoy-mekhaniki> - сайт кафедры теоретической механики МФТИ
3. <http://www.elibrary.ru/>

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Jupyter Notebook, Mathematica и др.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.



**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика перспективных технологий: альтернативная энергетика, научное программирование и функциональные материалы Физтех-школа Электроники, Фотоники и Молекулярной Физики кафедра теоретической механики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Экзамен

4 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:**

Н.И. Амелькин, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор  
М. Ахлумади, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель  
Е.С. Егорова, ассистент  
В.А. Козьминых, канд. физ.-мат. наук, доцент  
А.В. Сахаров, канд. физ.-мат. наук, доцент  
С.В. Семендяев, канд. физ.-мат. наук, доцент  
В.В. Сидоренко, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор  
С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аналитическая механика» обучающийся должен:

### знать:

1. Аксиоматику классической механики.
2. Кинематику точки и твердого тела, метод сложного движения.
3. Основные динамические величины и теоремы об их изменении.
4. Особенности движения материальной точки в центральном поле.
5. Основы динамики твердого тела, понятие о тензоре инерции.
6. Уравнения Лагранжа, иметь понятия об обобщенных координатах, скоростях и силах.
7. Условия равновесия механических систем.
8. Условия устойчивости равновесия механических систем.
9. Особенности движения механических систем в малой окрестности устойчивых положений равновесия.
10. Метод функций Ляпунова.
11. Особенности движения систем в случае воздействия на них внешних гармонических (относительно времени) сил.
12. Канонические уравнения Гамильтона, скобки Пуассона, первые интегралы.
13. Вариационный принцип Гамильтона.
14. Основные интегральные инварианты гамильтоновых систем.
15. Понятие о канонических преобразованиях. Критерии каноничности.
16. Уравнение Гамильтона-Якоби.

### уметь:

1. Использовать математический аппарат для решения конкретных механических задач.
2. Составлять и анализировать уравнения дифференциальных и геометрических механических связей.
3. Записывать выражения основных кинематических и динамических величин в координатной форме.
4. Составлять уравнения движения механической системы, используя основные теоремы динамики.
5. Решать специальные задачи классической механики (движение точки в центральном поле, движение твердого тела с одной неподвижной точкой).
6. Составлять и анализировать уравнения Лагранжа, находить их первые интегралы.
7. Определять положения равновесия механических систем и исследовать их на устойчивость.
8. Исследовать движения механических систем в окрестности устойчивых положений равновесия.
9. Составлять и исследовать канонические уравнения Гамильтона
10. Использовать аппарат вариационного исчисления в задачах нахождения прямого пути механической системы.
11. Записывать интегральные инварианты гамильтоновых систем.
12. Составлять уравнения Гамильтона-Якоби. В случае разделения переменных уметь решать эти уравнения.

**владеть:**

1. Навыками записи кинематических связей, наложенных на систему.
2. Навыками применения основных теорем динамики, уравнений Лагранжа и уравнений Гамильтона для получения уравнений движения в координатной форме.
3. Математическим аппаратом, необходимым для решения и исследования уравнений движения системы.
4. Навыками работы в различных программных системах, позволяющих осуществлять аналитическое и численное исследования математико-механических моделей.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Типовые контрольные задания приведены в пункте 6.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Осенний семестр:

1. Естественный (сопровождающий) трехгранник. Разложение скорости и ускорения точки в осях трехгранника.
2. Обобщенные координаты точки. Разложение скорости и ускорения точки в локальном базисе криволинейных координат. Коэффициенты Ламе.
3. Твердое тело. Разложение движения тела на поступательное движение и вращение (движение с неподвижной точкой). Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Распределение скоростей и ускорений в твердом теле (формулы Эйлера и Ривальса).
4. Кинематический винт твердого тела. Уравнение оси винта.
5. Плоскопараллельное движение твердого тела. Мгновенный центр скоростей.
6. Способы задания ориентации твердого тела. Углы Эйлера, матрицы направляющих косинусов. Кинематические уравнения Эйлера.
7. Теорема Эйлера о конечном повороте твердого тела с неподвижной точкой. Алгебра кватернионов. Тригонометрическая форма записи кватернионов. Кватернионный способ задания ориентации твердого тела.
8. Сложение поворотов в кватернионной форме. Параметры Родрига-Гамильтона.
9. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в кватернионах (уравнения Пуассона). Интегрирование уравнений Пуассона для прецессионного движения твердого тела.
10. Кинематика сложного движения. Сложение скоростей и ускорений точек в сложном движении.
11. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела в сложном движении.

12. Аксиоматика механики. Внешние и внутренние силы. Импульс, момент импульса и кинетическая энергия системы материальных точек. Центр масс, момент силы, элементарная работа и мощность силы.
13. Основные теоремы динамики в инерциальной системе отсчета.
14. Теорема Кенига.
15. Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы. Критерий потенциальности сил. Консервативные системы, закон сохранения энергии.
16. Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчета.
17. Движение точки в центральном поле. Центральная сила. Первые интегралы движения точки в центральном поле.
18. Уравнение Бине. Поле всемирного тяготения. Уравнение конических сечений.
19. Законы Кеплера. Задача двух тел.
20. Тензор инерции и эллипсоид инерции твердого тела. Главные оси инерции. Главная ось инерции.
21. Преобразование тензора инерции при повороте и параллельном переносе осей: теорема Гюйгенса–Штейнера для тензора инерции.
22. Выражения кинетического момента и кинетической энергии твердого тела через тензор инерции.
23. Динамические и кинематические уравнения Эйлера. Интегрируемые случаи.
24. Геометрическая интерпретация Пуансо.
25. Случай Эйлера. Первые интегралы движения. Параметры свободной регулярной прецессии.
26. Случай Лагранжа. Первые интегралы движения.
27. Основная формула гироскопии: формула для момента, поддерживающего вынужденную регулярную прецессию динамически симметричного твердого тела.
28. Эквивалентные преобразования системы сил, действующих на твердое тело. Алгоритм сведения к винту.
29. Механическая связь. Классификация связей.
30. Возможные и виртуальные перемещения.
31. Общее уравнение динамики для системы материальных точек с идеальными связями. Конфигурационное многообразие голономной системы с конечным числом степеней свободы.
32. Голономные системы. Обобщенные координаты. Уравнения Лагранжа. Обобщенные силы.
33. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Лагранжиан. Ковариантность и невырожденность уравнений Лагранжа.
34. Уравнения Лагранжа в неинерциальных системах отсчета.
35. Структура кинетической энергии. Кинетическая энергия в случае стационарной системы. Потенциальные, гироскопические, диссипативные силы.
36. Первые интегралы лагранжевых систем: циклические интегралы, обобщенный интеграл энергии (интеграл Пенлеве-Якоби).

Примеры экзаменационных билетов.

Билет 1. Кинематика сложного движения. Законы сложения скоростей и ускорений точек в сложном движении. Формула Кориолиса.

Билет 2. Формулы для угловой скорости и углового ускорения тела в сложном движении.

Билет 3. Кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в углах Эйлера.

Билет 4. Теоремы об изменении импульса и момента импульса системы материальных точек в инерциальном базисе.

Билет 5. Кинетическая энергия системы материальных точек. Теорема Кёнига.

Весенний семестр:

1. Определение положения равновесия. Принцип виртуальных перемещений. Условия равновесия консервативных систем и твердого тела.
2. Определение устойчивости (неустойчивости) положения равновесия по Ляпунову. Достаточные теоремы об устойчивости и неустойчивости положения равновесия консервативных систем (теорема Лагранжа-Дирихле, две теоремы Ляпунова и теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия).

3. Малые колебания консервативных систем. Линеаризация уравнений Лагранжа вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот.
4. Главные координаты системы. Матрица преобразования координат, амплитудные вектора. Общее решение как сумма главных колебаний.
5. Определение асимптотической устойчивости положения равновесия. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Линеаризация уравнений Лагранжа. Характеристическое уравнение. Критерий Рауса-Гурвица.
6. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Условие Майевского-Четаева.
7. Определение устойчивости (неустойчивости) невозмущенного движения. Прямой метод Ляпунова: теорема Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости невозмущенного движения, теорема Четаева о неустойчивости невозмущенного движения.
8. Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Амплитудно-фазовая, амплитудная и фазовая характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.
9. Элементы теории катастроф. Кривая равновесий. Основные типы бифуркаций в динамических системах. Дивергенция и флаттер.
10. Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.
11. Уравнения Уиттекера.
12. Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Теорема Эмми Нетер.
13. Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.
14. Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.
15. Канонические преобразования. Локальный критерий каноничности. Критерий каноничности в терминах производящих функций.
16. Преобразования, допускающие  $(q, \dot{q})$ -описание (свободные преобразования). Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.
17. Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Примеры экзаменационных билетов.

Билет 1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Теорема Якоби.

Билет 2. Случаи разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби.

Билет 3. Интегральные инварианты Пуанкаре и Пуанкаре–Картана гамильтоновых систем.

Билет 4. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Ли Хуа-чжуна об универсальных интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем (без доказательства).

Билет 5. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновой системы.

#### Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

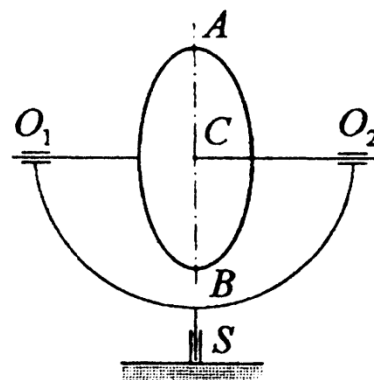
Экзамен может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.

## 6. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Примеры контрольных заданий:

**Задача 1.** Диск радиуса  $r$  катится по плоскости, прижимая обруч радиуса  $R$ . Проскальзывание отсутствует. Найти угловую скорость обруча, а также скорость и ускорение ее верхней точки  $M$ , если скорость центра диска постоянна и равна  $v_0$ .

**Задача 2.** Диск радиуса  $R$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси  $O_1O_2$ , перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр  $C$ . В свою очередь, ось  $O_1O_2$  закреплена в рамке  $O_1SO_2$ , вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг неподвижной оси  $CS$ ,  $O_1O_2 \perp CS$ . Найти мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение диска, а также величины скоростей и ускорений точек  $A$  и  $B$  диска, лежащих на концах диаметра диска, имеющего в данный момент направление, совпадающее с направлением оси  $CS$ .



**Задача 3.** Пусть твердое тело движется вокруг неподвижной точки  $O$ , а  $OXYZ$  - неподвижная система координат. Производится три последовательных поворота на величины углов Эйлера  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Записать результирующий поворот в виде кватерниона.



## Система выставления итоговых оценок по курсу «Аналитическая механика»

Итоговая оценка студента за семестр складывается из пары чисел: «семестрового рейтинга» и «экзаменационной оценки». При этом понятие «семестровый рейтинг» соответствует оценке работы студента в семестре, а «экзаменационная оценка» отражает уровень знаний, продемонстрированный студентом на экзамене. Итоговая оценка измеряется по десятибалльной шкале. Формат записи оценки – «хорошо(7)», где 7 – «оценка по десятибалльной шкале», хорошо – результат отображения итоговой оценки на стандартное множество оценок в пятибалльной системе. Отображение задается следующей таблицей:

10-балльная система	5-балльная система
10	отлично
9	отлично
8	отлично
7	хорошо
6	хорошо
5	хорошо
4	удовлетворительно
3	удовлетворительно
2	неудовлетворительно
1	неудовлетворительно

1. **Итоговая оценка** по курсу «Аналитическая механика» - целое число от 3 до 10.

Составляющие итоговой оценки:

### **Семестровый рейтинг:**

- Задания (от 0 до 3-х баллов)

Материал семестра по курсу «Аналитическая механика» разбит на два задания. Баллы за задания ставятся с учетом того, как студент усвоил материал, как написал контрольную работу по материалу задания, успел ли сдать задание в срок. Максимальным баллом должна поощряться та составляющая сдачи, которую студент выполняет самостоятельно. Студент, принеся тетрадку с заданием и продемонстрировавший посредственный уровень владения материалом, не может получить за задание более одного балла.

- Иные достижения (от 0 до 1 балла)

Студент может быть поощрен дополнительным баллом за активное участие в семинарских занятиях, успехи в лекционных контрольных, выступления на конференциях в МФТИ, успешное участие в олимпиадах различного уровня и т.п. Решение о поощрении студента принимает руководство кафедры, по ходатайству преподавателя, ведущего семинарские занятия.

### **Экзаменационная оценка:**

- Устный экзамен (от 0 до 6-ти баллов)

Отличная оценка – 5 баллов;

Хорошая оценка – 3 балла;

Удовлетворительная оценка – 1 балл;

Неудовлетворительная оценка – 0 баллов.

Баллы «6», «4» и «2» соответствуют экзаменационной оценке «отлично с плюсом», «хорошо с плюсом» и «три с плюсом». Студент, получивший неудовлетворительную оценку за ответ на экзамене, не может получить положительную итоговую оценку. В экзаменационную ведомость в этом случае проставляется оценка «неуд(2)», если студент сдал задания, и «неуд(1)», если студент не сдал хотя бы одно задание.

## **2. Порядок сдачи экзамена**

Студентам, не сдавшим одно или два задания, предлагается подтвердить, что несмотря на несданные задания, они владеют материалом семестра и умеют решать стандартные задачи. Студенты, не продемонстрировавшие такого навыка, получают за экзамен оценку «неудовлетворительно» («неуд(1)»).

Студенты, не сдавшие оба задания, в день сдачи экзамена должны решить 3 задачи на темы базового задания по курсу аналитической механики. Время на решение каждой задачи – 40 минут. Пользоваться литературой и электронными устройствами не разрешается. Студентам, успешно справившимся со всеми 3-мя задачами, засчитываются задания и добавляются 2 балла к рейтингу. Студенты, не решившие хотя бы одну из трёх задач, получают за экзамен оценку «неудовлетворительно».

Студенты, не сдавшие второе задание, в день сдачи экзамена должны решить 2 задачи на темы базового второго задания по курсу аналитической механики. Время на решение каждой задачи – 40 минут. Пользоваться литературой и электронными устройствами не разрешается. Студентам, успешно справившимся с 2-мя задачами, засчитывается второе задание, и добавляется 1 балл к рейтингу. Студенты, не решившие хотя бы одну из двух задач, получают за экзамен оценку «неудовлетворительно».

Студент, сдавший оба задания, придя на экзамен, получает билет, включающий один теоретический вопрос и одну задачу. Время на подготовку – 40 минут на теоретический вопрос и 40 минут на решение задачи. При подготовке ответа на теоретический вопрос (и решении приложенной к билету задачи) разрешается пользоваться любой справочной литературой. Использование электронных устройств запрещено. Студент, хорошо зарекомендовавший себя на практических занятиях, может быть освобожден от задачи.

Экзаменатор должен задать студенту не менее трех вопросов по программе курса.

## **3. Порядок проведения переекзаменовок**

Студенту, пришедшему на переекзаменовку, предлагается пройти процедуру, совпадающую с процедурой экзамена. Количество переекзаменовок студента ограничено двумя попытками, а также числом переекзаменовок, проходящих на кафедре теоретической механики. Число переекзаменовок согласуется с учебным управлением.

Студент, использующий вторую попытку переекзаменовки, предоставляет ответы на вопросы и решения задач в письменном виде комиссии из не менее чем двух преподавателей, назначаемых заведующим кафедрой. После завершения переекзаменовки комиссия оценивает ответы на вопросы и решения задач студента. Итоговая оценка объявляется студенту, фиксируется в экзаменационной ведомости и подписывается всеми членами комиссии. Выставленная комиссией оценка считается окончательной и апелляции не подлежит.

В остальном процедура проведения экзамена описана в «Положении о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся МФТИ».

Заведующий кафедрой  
теоретической механики

С.В. Соколов